Korene polynómov

Riešenia

1. a) ... tak platí $4a^4 - 8a^3 - 13a^2 + 2a + 3 = 0$, t. j. $a(4a^3 - 8a^2 - 13a + 2) = -3$, ... musí byť deliteľ čísla -3,

b) celočíselnými koreňmi nemôžu byť čísla, ktoré nie sú deliteľmi čísla -3. Z celých čísel by koreňmi mohli byť iba delitele čísla –3, t. j. čísla –3, –1, 1 a 3. Z nich koreňom je iba číslo –1 a 3 (zistíme to dosadením do ľavej strany v (*)),

c) • rovnica nemá koreň, z celých čísel koreňmi môžu byť iba delitele čísla 6), • $x = -1$, $x = 2$ (z celých čísel koreňmi môžu byť iba delitele čísla 2),

d) • ak rovnosť (***) zapíšeme v tvare $x\left(x^2 - 4x - \frac{1}{4}\right) = -1$, tak implikácia „ak x je celé, tak číslo v zátvorke je tiež celé“ vo všeobecnosti nemusí platiť (kvôli zlomku $\frac{1}{4}$),
• v tvare $4x^3 - 16x^2 - x + 4 = 0$ (obidve strany v (***) sme vynásobili číslom 4, aby všetky koeficienty na ľavej strane boli celé čísla),

e) nevyplýva (ide o neplatný úsudok, teda nesprávnu úvahu, ktorá v tomto konkrétnom prípade aj vedie k nepravdivému záveru, pretože rovnica $x^2 + 4x + 2 = 0$ má korene $x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$), z uvedenej skutočnosti vyplýva len to, že daná rovnica nemá *celočíselné* korene.

2. b) ... platí teda rovnosť $3^3 - 2\cdot 3^2 + 5\cdot 3 - 24$ $= 0$ ... $= (x^3 - 3^3) - 2(x^2 - 3^2) + 5(x - 3) - (24 - 24)$...

$(x^3 - 3^3)$	$=$	$(x - 3)\cdot$	$(x^2 + 3x + 9)$
$-2(x^2 - 3^2)$	$=$	$-2(x - 3)\cdot$	$(x + 3)$
$5(x - 3)$	$=$	$5(x - 3)$	

Preto

$$\boxed{x^3 - 2x^2 + 5x - 24} = (x - 3)(x^2 + 3x + 9 - 2(x + 3) + 5) = (x - 3)(x^2 + x + 8)$$

3. $a_0 = 0$ (ak do predpisu $P_n(x)$ dosadíme $x = 0$, dostaneme $P_n(0) = a_0$, preto podmienka „0 je koreň polynómu P“, t. j. $P_n(0) = 0$, je ekvivalentná s podmienkou $a_0 = 0$).

4. Množina všetkých riešení je **b)** $\left\{2; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$, po vydelení koreňovým činiteľom $x - 2$ dostaneme kvadratickú rovnicu $x^2 + x - 1 = 0$,

c) $\{3\}$, po vydelení koreňovým činiteľom $x - 3$ dostaneme kvadratickú rovnicu $x^2 + x + 1 = 0$, ktorá nemá reálne korene,

d) $\left\{-1; 1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$, po vydelení polynómom $x^2 - 1$ (to je súčin koreňových činiteľov $x - 1$ a $x + 1$) dostaneme kvadratickú rovnicu $6x^2 + x - 1 = 0$,

f) $\{-5; -1; 2\}$, všetky korene sme našli už v 1. kroku ako delitele absolútneho člena –10, ďalšie korene rovnica nemôže mať, pretože rovnica tretieho stupňa má najviac 3 reálne korene (pozri poznámku za riešením úlohy 4a)),

g) $\left\{-1; \frac{1}{2}; 2\right\}$, aby sme mohli použiť úvahu z úlohy 1, musíme rovnicu zapísať v tvare $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ (pozri tiež riešenie úlohy 1d)), korene –1 a 2 sme našli ako delitele absolútneho člena 2, po vydelení polynómom $x^2 - x - 2$ (to je súčin koreňových činiteľov $(x + 1)$ a $(x - 2)$) dostaneme polynóm $2x - 1$,

h) $\{0\}$, rovnicu možno zapísať v tvare $2x(x^2 + 4x + 7) = 0$ (premenná x, ktorú sme vyňali pred zátvorku, predstavuje koreňový činiteľ prislúchajúci koreňu $x = 0$),

i) $\{0\}$, rovnicu možno zapísať v tvare $x^2(x^2 + 2x + 3) = 0$, z tohto zápisu vidno, že 0 je dvojnásobný koreň tejto rovnice (pozri poznámku za riešením úlohy 4d); x je koreňový činiteľ prislúchajúci koreňu $x = 0$).

5. a) Napr. $x(x^2 + 1) = 0$, vo všeobecnosti každá rovnica tvaru $(x - d)(ax^2 + bx + c) = 0$, kde polynóm $ax^2 + bx + c$ nemá reálne korene (t. j. $b^2 - 4ac < 0$).

b) Napr. $(x - 1)^3 = 0$, vo všeobecnosti každá rovnica tvaru $a(x - b)^3 = 0$.

c) Taká rovnica neexistuje: Ak rovnica $P_3(x) = 0$ má dvojnásobný koreň $x = \alpha$, tak polynóm $P_3(x)$ možno zapísať v tvare $P_3(x) = (x - \alpha)^2(ax + b)$, preto koreňom rovnice $P_3(x) = 0$ je aj riešenie β rovnice $ax + b = 0$. Rovnica $P_3(x) = 0$ má teda buď dva korene (ak $\alpha \neq \beta$), jeden dvojnásobný a druhý jednoduchý, alebo jeden trojnásobný koreň (ak $\alpha = \beta$). Obidve tieto možnosti odporujú predpokladu, že rovnica má iba jeden koreň, a to dvojnásobný. (Ako vidno, tvrdenie *neexistuje rovnica tretieho stupňa, ktorá má iba jeden koreň, a to dvojnásobný* sme dokázali sporom.)

6. Nemôžu nastať prípady:
(A) : ak má polynóm $P_4(x)$ jednoduchý koreň $x = \alpha$, možno ho zapísať v tvare $P_4(x) = (x - \alpha)P_3(x)$, kde P_3 je polynóm 3. stupňa – ten má aspoň jeden reálny koreň, preto P_4 má buď aspoň dva rôzne korene, alebo koreň, ktorý je aspoň dvojnásobný,
(C) : ak má polynóm $P_4(x)$ trojnásobný koreň $x = \alpha$, možno ho zapísať v tvare $P_4(x) = (x - \alpha)^3(ax + b)$, pritom rovnica $ax + b = 0$ má riešenie; preto P_4 má buď dva rôzne korene, alebo jeden štvornásobný koreň.
Možnosti (B) vyhovuje každá rovnica tvaru $(x - d)^2(ax^2 + bx + c) = 0$, kde polynóm $ax^2 + bx + c$ nemá reálne korene. Možnosti (D) vyhovuje každá rovnica tvaru $a(x - d)^4 = 0$.

7. $\alpha = -(a + b + c)$, $\beta = ab + ac + bc$, $\gamma = -abc$.

8. ... číslo $5 = 1 + 4$ je koreň rovnice $x^3 = 12x + 65$, číslo $2 = 5 - 3$ je koreň rovnice

$x^3 = -45x + 98$ ..., druhá rovnica v (2) je $9 = a^3 + b^3$... koreňom rovnice (1) potom iste bude číslo $a + b$ ... to je ekvivalentné s $(ab)^3 = 8$, druhá rovnica v (5) je $p + q = 9$ ... dostaneme kvadratickú rovnicu $p^2 - 9p + 8 = 0$ ... korene sú $p = 1$ a $p = 8$ ... $[p; q] = [1; 8]$ a $[p; q] = [8; 1]$ ... dostaneme dvojicu $[a; b] = [1; 2]$ ... $[a; b] = [2; 1]$ ... $a + b = 3$.

9. a) $x = 5$ $(= 3 + 2)$,

b) $x = 4$ $(= 5 - 1)$,

c) $x = 2$ $(= 1 + 1)$,

d) $x = 4$ $(= 2 + 2)$,

e) $x = \frac{3}{4}$ $(= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, rovnicu sme prepísali na tvar $x^3 = \frac{3}{8}x + \frac{9}{64}$, aby koeficient pri x^3 bolo číslo 1),

f) $x = \frac{1}{4}$ $(= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, rovnicu sme prepísali na tvar $x^3 = -\frac{3}{8}x + \frac{7}{64}$, aby mala tvar zhodný s tvarom (1) z úlohy 8).

10. Hľadáme a, b tak, aby platilo $3ab = A$, $a^3 + b^3 = B$. Po substitúcii $a^3 = p$, $b^3 = q$ dostaneme sústavu $pq = \frac{A^3}{27}$, $p + q = B$. Ak z druhej rovnice vyjadríme q a dosadíme do prvej, dostaneme kvadratickú rovnicu $p^2 - Bp + \frac{A^3}{27} = 0$, ktorej diskriminant $d = B^2 - \frac{4A^3}{27}$ je podľa predpokladu v zadaní nezáporný, preto korene sú $p = \frac{B \pm \sqrt{d}}{2}$. Potom $q = \frac{B \mp \sqrt{d}}{2}$. Koreňom rovnice $x^3 = Ax + B$ je číslo $x = a + b = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} = \sqrt[3]{\frac{B + \sqrt{d}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{B - \sqrt{d}}{2}}$.